0.1 電流と磁場 2

1. 磁気力に関するクーロンの法則

磁気の中で昔から知られていたものはもちろん磁石の作用である。磁石の働きは, その N 極と S 極にそれぞれ正と負の磁荷があって, 正と正, 負と負の磁荷の間には斥力が働き, 正と負の磁荷の間には引力が働くと考えれば説明できる。この磁気力の定量的な研究は, 静電気力のときと同じくクーロンによって行われた。クーロンは以下のことを確かめた。

2 つの磁荷の間にはたらく磁気力の大きさ F (N) は, 磁荷の磁気量をそれぞれ m_1, m_2, 磁荷間の距離を r (m) とすると,

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m_1 m_2}{r} \quad (N)$$

である。これもクーロンの法則である。ここで μ_0 は真空の透磁率であり,

$$\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} = c^2$$

という関係式がある（c は光の速さ)。

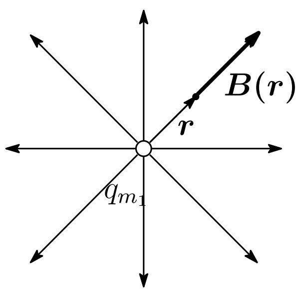
また, この式を, 静電場と同様に, 磁荷が周囲の空間に磁場をつくり, その磁場が第二の磁荷に力を及ぼす, という形に書き表すことができる。原点 O にある磁荷 q_{m_1} が, O から距離 r (m) のところに, 以下の大きさをもつ磁場

$$B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m_1}{r^2} \cdots (a)$$

をつくり（向きは図の向き）, その点に置かれた磁荷 q_{m_2} は磁場から以下の大きさの力

$$F = m_2 B(r) \cdots (b)$$

を受ける, と考えればよい（向きも同じ)。なお, ここまであえて磁荷の単位を書かないでおいたのは, 次のローレンツ力を紹介するまで, 定義できないからであった。



クーロン磁場

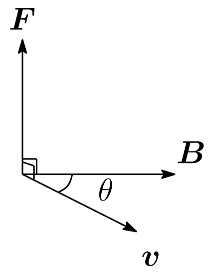
2. ローレンツ力

磁場 $\boldsymbol{B}$ の中で動く電荷 q (C) の速度を $\boldsymbol{v}$ とし, $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{B}$ の間の角度を θ とする。実験によると, 電荷が受ける力 $\boldsymbol{F}$ の大きさは $qvB\sin\theta$ に比例する。$\boldsymbol{F}$ の方向は, $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{B}$ に直交し, $q > 0$ のときには $\boldsymbol{v}$ から $\boldsymbol{B}$ へ廻す右ねじの進む向きを向く。これらの性質を外積の記号 $\times$ を用いて表すと,

$$\boldsymbol{F} = \alpha q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

と表すことができる。ここで α は比例定数である。

ローレンツ力



ここで B の単位であるが, $\alpha = 1$ とすれば定義することができて, 実際それで定義された。こうして定められた B の単位を, T（テスラ）あるいは Wb/m^2 と呼ぶ。Wb は「ウェーバー」と読む。

さて B の単位をこのように定義すると, ローレンツ力は

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \cdots (c)$$

と表される。なお, B の正式の名前は**磁束密度**であるが, 単に磁場と呼ぶことも多い。

すると, 1. における磁荷の単位を決めることができる。(b) と (c) を比べると, qv と m_2 の単位が同じである。これと $C = A \times s$ より, 磁荷の単位は $A \cdot m$ となる。また, (c) の単位をみると,

$$[N] = [A \times m] \cdot [Wb/m^2]$$

より,

$$[Wb] = [N \cdot A/m]$$

という関係にあることがわかる。

なお, 磁場の強さ H (N/Wb) というものも定義されている。これは, 電場の強さ E (N/C) の磁場バージョンであるが, 以下の関係式が成り立つので, 以下の式を覚えた上で, B で統一しておくとわかりやすい。

$$B = \mu H \qquad (\mu\text{は物質の透磁率。真空の場合は}\mu_0\text{である})$$

3. ビオ・サバールの法則

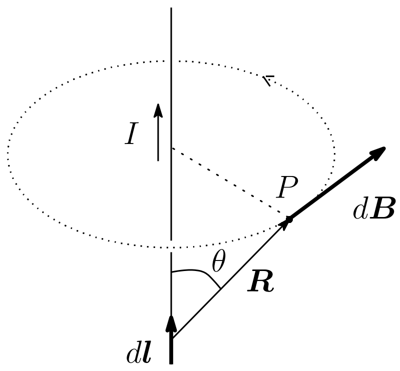
電流要素がつくる磁場を記述する法則であり, 次の式で表される。

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_C \frac{d\boldsymbol{l} \times \hat{\boldsymbol{R}}}{R^2}$$

ここで,

$\boldsymbol{B}$: 図の点 P に作られる磁場。

$\hat{\boldsymbol{R}}$: $\boldsymbol{R}$ は回路の微小部分 $d\boldsymbol{l}$ から P へのベクトル, $\hat{\boldsymbol{R}}$ は $\boldsymbol{R}$ 方向の単位ベクトルである。



ベクトルの外積の形で書くとややこしいので, 次のように大きさを考えてもよい。図の $d\boldsymbol{B}$ の大きさは, $d\boldsymbol{l}$ と $\boldsymbol{R}$ のなす角を θ とすれば,

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin\theta}{R^2}$$

である（単位はそれぞれ標準単位系）。向きは, 図の向きを覚えるとよい。電流の進む向きに右ねじが進むとき, ねじ頭の回る方向である。

例 1 : 直線電流の作る磁場

直線電流 I から距離 d 離れた点 P における磁場を求める。直流電流の微小部分 dl が P につくる磁場 $d\boldsymbol{B}$ は, 図のように紙面の表から裏へ向き, その大きさは, ビオ・サバ—ルの法則より,

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\theta}{R^2}$$

である。これを全ての dl について加え合わせればよい。図より

$$\frac{dl\sin\theta}{R^2} = \frac{Rd\theta}{R^2} = \frac{d\theta}{R} = \frac{\sin\theta d\theta}{d}$$

なので,

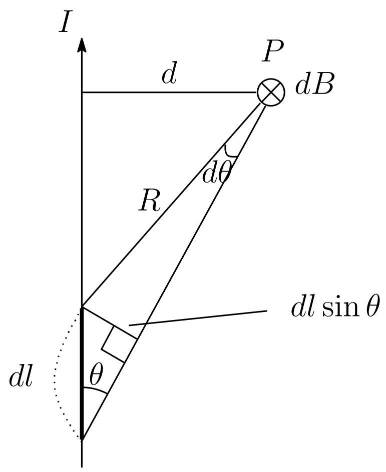
$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{Idl\sin\theta}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi d}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

となる。よって,

直流電流 I (A) が, 距離 d (m) だけ離れたところに作る磁場の大きさを B (Wb) とする。

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

が成り立つ。



例 2 : 円電流が中心軸上に作る磁場

半径 a の円形回路に電流 I が流れる場合を考える。まず, 円の中心における磁場を求めると, 微小部分 dl が中心に作る磁場の大きさは, ビオ・サバールの法則より

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{a^2}$$

であり, 中心軸の方向になる。向きは, 図のように, 円電流に関して右ねじが進む向きとなる。dl について 1 周分加え合わせると, 円周の長さは $2\pi a$ なので, 円電流が中心に作る磁場の大きさは,

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2a}}$$

となる。

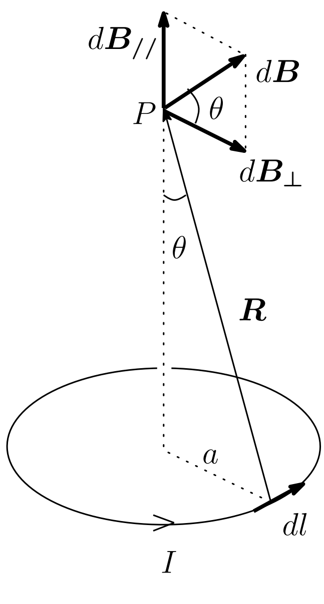
おまけで, 中心軸上の任意の点 P の磁場を考えてみる。図にあるように, P から円周までの距離を R とすると, 微小部分 dl がこの点に作る磁場 $d\,\boldsymbol{B}$ の軸方向の成分 $d\boldsymbol{B}_{//}$ の大きさは, 図に示す角度 θ を用いて,

$$dB_{//} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{R^2}\sin\theta = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{a^2}\sin^3\theta$$

となる。dl について加え合わせると,

$$B_{//} = \frac{\mu_0 I}{2a}\sin^3\theta$$

となる。$d\boldsymbol{B}_{\perp}$ は対称性から相殺されて 0 になるので, これがそのまま点 P における磁場の大きさになる。方向は中心軸の方向となる。



4. アンペールの法則

ビオ・サバールの法則から導かれる。任意の閉曲線 C に沿う磁場の循環 $\oint_C \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l}$ と, 閉曲線 C に絡む電流の関係を示したものであり, 以下の式で表される。

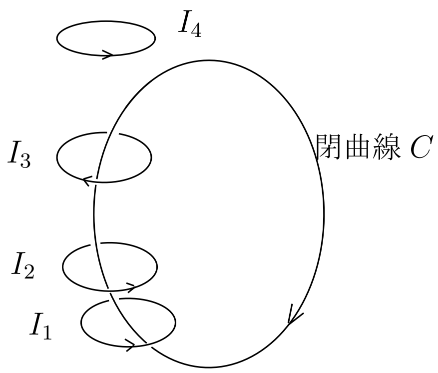
$$\oint_C \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I$$

ここで, I は閉曲線 C と絡む電流の代数和である。C と正の向きに絡む電流には $I_i > 0$, C と負の向きに絡む電流には $I_i < 0$ と符号をつける。C と絡まない電流には $I_i = 0$ とする。

例えば次の図の場合では,

$$I = I_1 + I_2 - I_3$$

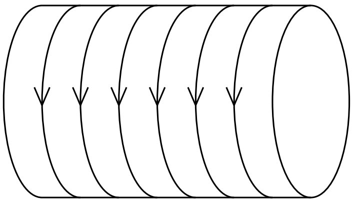
となる。



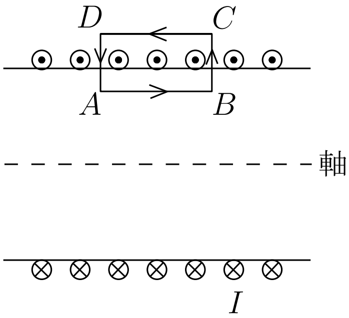
高校の物理においては, 次の一例のみ登場する。

例：無限に長いソレノイドの内部の磁場

円筒に導線を密に巻いたコイルをソレノイドと呼ぶ。軸方向の単位長さ当たりの導線巻き数を n (回$/m$) とし, 導線に流れる電流を I とする。対称性から, ソレノイド内部の磁場は軸と平行で, 大きさは中心軸からの距離のみによると考えてよい。また, 外部の磁場は 0 とする。



ソレノイド



ソレノイドの断面図

図の四角形 $ABCD$ にアンペールの法則を適用すると, 法則の左辺の積分に関与するのは辺 AB だけなので, 辺 AB 上の磁場を B とすると,

$$B = \mu_0 n I$$

を得る。これは, 磁場が中心軸からの距離にも依らないことを示している。

まとめると,

ソレノイドを貫く磁場の大きさ B (Wb) は, 単位長さ当たりの導線巻き数を n (回$/m$), 導線に流れる電流を I (A) とするとき,

$$B = \mu_0 n I$$

である。