$\boxed{\textbf{場合の数}}$

1. a, b, c の並べ方は何通りあるか。

2. a, b, c, d の並べ方は何通りあるか。

3. a, b, c, d の 4 文字から, 異なる 3 つの文字を取って 1 列に並べるとき, 並べ方は何通りあるか。

4. a, b, c, d の 4 文字から, 異なる 3 つの文字を選ぶ。選び方は何通りあるか。

5. 赤, 青, 黄, 緑, 白の 5 本のリボンがある。この中から 3 本を選ぶ選び方は何通りあるか。

6. 以下の各問に答えよ。

(1) 50 人の生徒から 3 人を選ぶ選び方は何通りあるか。
(2) 50 人の生徒から 3 人を選び並べるとき, 並べ方は何通りあるか。
(3) 50 人の生徒から, 生徒会長 1 人と副会長 2 人を選ぶ選び方は何通りあるか。

$\boxed{\text{解説}}$

1.　まずは数え上げられる場合です。

(1) まず先頭を a に固定して考えると, (a, b, c), (a, c, b) の 2 通り。
(2) 次に先頭を b に固定して考えると, (b, c, a), (b, a, c) の 2 通り。
(3) 次に先頭を c に固定して考えると, (c, a, b), (c, b, a) の 2 通り。

(1)〜(3) に重複はないので, 合計 6 通り, となります。

2.　1. に比べ文字が 1 つ増えました。まだ数え上げられそうですが, そろそろ規則性が見つかりそうです。

まず先頭を a に固定して考えると, そのあとに続く残り 3 つ（b, c, d）の並べ方は 1. と同様にして 6 通りになります。

次に先頭を b に固定して考えると, 残り 3 つ（a, c, d）の並べ方はやはり 6 通りになります。

先頭が c の場合でも, d の場合でも同様なので, 合計は $6 \times 4 = 24$ 通り, となります。

さらに文字を増やしていっても同じように考えることができます。例えば, 文字が 8 つ（a, b, c, d, e, f, g, h）の場合を考えてみます。

8 つの文字のうち, 先頭を a に固定しますと, 残りの 7 個の文字の並べ方を考えることになります。つまり, 求める場合の数を x としますと,

$$x = \{\text{先頭に置く文字の場合の数 (8)}\} \times (\text{7 個の文字の並べ方の数}) \cdots (1)$$

となります。ところでこの「7 個の文字の並べ方の数」ですが, 同様に, 先頭を 1 つ（例えば b に）固定して, 残り 6 個の文字の並べ方を考えることになります。すなわち,

$$(\text{7 個の文字の並べ方の数}) = \{\text{先頭に置く文字の場合の数 (7)}\} \times (\text{6 個の文字の並べ方の数}) \cdots (2)$$

です。(1)(2) を合わせると,

$$x = 8 \times 7 \times (\text{6 個の文字の並べ方の数}) \cdots (3)$$

となります。規則性がみえてきましたでしょうか。以下同様にして,

$$x = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times (\text{2 個の文字の並べ方の数})$$

とここまで書き直せました。2 個の文字の並べ方は (g, h), (h, g) のように 2 通りなので, 結局,

$$x = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 40320$$

となります。これは 8!（8 の階乗）に他なりません。このように, 「異なる n 個のものを並べる並べ方」は, $n!$ になります。

3.　4 つの文字から異なる 3 つの文字を取る取り方は,

$$
\begin{aligned}
&a \text{ を除いた } (b, c, d), \quad b \text{ を除いた } (a, c, d), \\
&c \text{ を除いた } (a, b, d), \quad d \text{ を除いた } (a, b, c)
\end{aligned}
$$

の 4 通りあります。それぞれを並べるのですが, 先ほどと同様, その並べ方は各々 $3!$ 通りあります。よって, $4 \times 3! = 24$ 通りとなります。まだ数え上げでなんとかなります。

では, 5 つの文字から異なる 3 つの文字を並べる並べ方はどうでしょうか。

3 つの枠を用意し, どのように文字を配置するかを考えます。

$$① \quad ② \quad ③ \quad \longleftarrow a,\ b,\ c,\ d,\ e$$

まず, ①に, a〜b の 5 つのうちどれか 1 つを入れるので, その入れ方で 5 通りあります。

その各々の場合について, ②に, 残り 4 つのうちどれか 1 つを入れるので, その入れ方で 4 通りあります。

さらにその各々について, ③に, 残り 3 つのうちどれか 1 つを入れるので, その入れ方で 3 通りあります。よって, $5 \times 4 \times 3 = 60$ 通りあります。

ここで, 一般化してみます。n 個の異なるものから異なる m 個（$m \leq n$）取り出して並べる並べ方を考えます。

先ほどと同様に, m 個の枠を用意します。

$$① \quad ② \cdots \quad ⓜ$$

まず①に n 個のうちどれか 1 つを入れるので, その入れ方が n 通りあります。

その各々について, ②に残り $n-1$ 個のうちどれか 1 つを入れるので, その入れ方が $n-1$ 通りあります。

その各々について, $\cdots$, と続けますと,

$$n \times n-1 \times \underbrace{n-2}_{③} \times \underbrace{n-m+1}_{ⓜ} \text{ (通り)}$$

となります。ここで, 「順列」を意味する英単語「Permutation」の頭文字 P をとり,

$${}_nP_m = n \times n-1 \times \underbrace{n-2}_{③} \times \underbrace{n-m+1}_{ⓜ}$$

と定義しますと, ${}_nP_m$ は「n 個の中から異なる m 個を取り出して並べる並べ方の場合の数」になります。これが高校で学ぶ「順列」です。なお,

$${}_nP_m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

と書き直すことができます。

4.　先ほど,「5 つの文字から異なる 3 つの文字を並べる並べ方」を調べ, それが 60 通りであることをみました。今度は, 並べる必要はなく, 選び出す選び方です。今回は文字ではなく, 5 種類のリボンですが。これは, 次のように考えることができます。

並べ方の 60 通りの中に, (赤, 青, 黄) の 3 種のリボンで構成されている並べ方があるはずです。それらは,

$$(赤,青,黄),\quad (赤,黄,青),\quad (青,赤,黄),\quad (青,黄,赤),\quad (黄,赤,青),\quad (黄,青,赤)$$

の 6 通りです（$3! = 6$ 通り）。いま (赤, 青, 黄) についてみましたが, 3 種の組み合わせそれぞれについて, 6 通りの並べ方があるはずです。並び方は数えないので, 求める答えは $60/6 = 10$ 通りになります。

これを一般化すると, n 個の中から m 個を取り出す取り出し方の数は,

$$\frac{{}_nP_m}{m!}$$

となります。いま,「組み合わせ」を意味する英単語「Combination」の頭文字 C をとり,

$${}_nC_m = \frac{{}_nP_m}{m!} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

と定義しますと, ${}_nC_m$ は「n 個の中から異なる m 個を取り出す取り出し方の数」になります。これが高校で学ぶ「組み合わせ」です。

5.　実際に使ってみましょう。(3) は応用問題です。

(1)

$${}_{50}C_3 = \frac{50!}{47!3!} = \frac{50 \times 49 \times 48}{3!} = 19600\ (通り)$$

です。

(2)

$${}_{50}P_3 = \frac{50!}{47!} = 50 \times 49 \times 48 = 117600\ (通り)$$

です。

(3)　まず生徒会長の枠に 1 人選ぶ選び方は, 50 通りです。その各々について, 残り 49 人から 2 人を選ぶ選び方は

$${}_{49}C_2 = \frac{49!}{47!2!} = \frac{49 \times 48}{2!} = 1176\ (通り)$$

なので, 求める答えは $50 \times 1176 = 58800$（通り）になります。

慣れない方は, 設定をいろいろ換えてみて反復練習をして下さい。