初等幾何　問題集

本問題集は, 幾何学の初歩を学習するためのものです。中学 3 年生〜高校 1 年生を主な対象としております。初めは解答を見ずに挑戦して下さい。そして, できなかった問題を解けるようになるまで復習して下さい。

難しい問題もありますので, 初めにできなくても気になさらず, しっかり復習して下さい。

本問題集を終えれば, 高校入試の幾何の問題にも対処できますし, 高校で学習するベクトルなどに抵抗なく慣れていけるでしょう。

この問題集で, 幾何学への苦手意識を無くしてしまいましょう。

本問題集ですが, 問題は 2 ページから, 解答解説は 24 ページからです。おおまかな分かれ方は以下になります。

問題編

12.　角の二等分線上の点は, その角の 2 辺から等距離にあることを証明せよ。

28.　$AB > AC$ の鋭角三角形 ABC において, 辺 BC の中点を M とするとき,

$$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$$

が成り立つことを証明せよ。

66.　$\triangle ABC$ の 3 頂点から対辺またはその延長に引いた垂線は 1 点 H で交わることを証明せよ（この点 H を $\triangle ABC$ の垂心という）。

82.　2 定点 A, B からの距離の比が $m : n$ である点 P の軌跡を求めよ。ただし, $m > n$ であるとする。

84.　四角形 $ABCD$ の辺 AB, CD 上にそれぞれ P, Q をとる。P, Q が AB, CD 上を任意に動くとき, PQ の中点の存在する範囲を図示せよ。

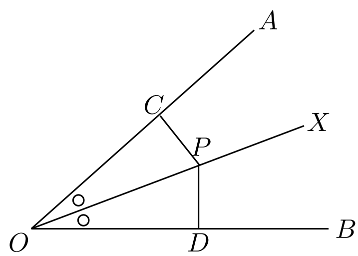
90.　半径 5 の円内に, $OP = 3$ なる定点 P がある。このとき, P を通る弦の中で長さが最大のものと最小のものの長さをそれぞれ求めよ。

93.　平面 α と直線 l との交点を O とする。l が O を通る α 上の 2 直線 a, b に垂直ならば, l は α に垂直である。これを証明せよ。なお, 直線 l が平面 α 上のすべての直線と垂直であるとき, l と α は垂直であるといい, $l \perp \alpha$ と書く。

解答解説

12.　図を描いてみて, 具体的に点を描いて, 何を証明すればよいかを考えます。本問の内容は知っておきましょう。非常に重要です。

（解答）次の図のように, $\angle AOB$ の二等分線を OX とする。OX 上の点 P から角の 2 辺 OA, OB にそれぞれ垂線 PC, PD を引く。$\triangle OPC$ と三角形 $\triangle OPD$ において, $\angle POC = \angle POD$, $\angle PCO = \angle PDO = 90^\circ$, OP は共通なので, $\triangle OPC \equiv \triangle OPD$ である。よって, $PC = PD$ なので, 題意は示された。（証明終）

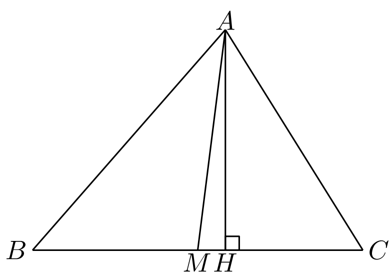


28.　有名な「中線定理」です。突然役に立ったりしますので, 覚えておいて損はありません。証明については, AB^2 や AC^2 を三平方の定理で他の辺で表しましょう。

（解答）次の図のように, A から辺 BC に下ろした垂線の足を H とすると, $BM = CM$, および三平方の定理より,

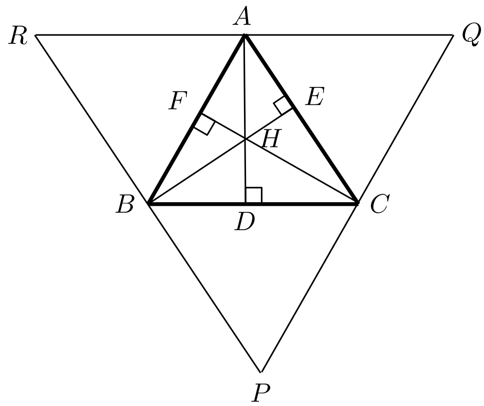
$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= (AH^2 + BH^2) + (AH^2 + CH^2) \\ &= 2AH^2 + BH^2 + CH^2 \\ &= 2AH^2 + (BM + MH)^2 + (CM - MH)^2 \\ &= 2(AH^2 + BM^2 + MH^2) \end{aligned}$$

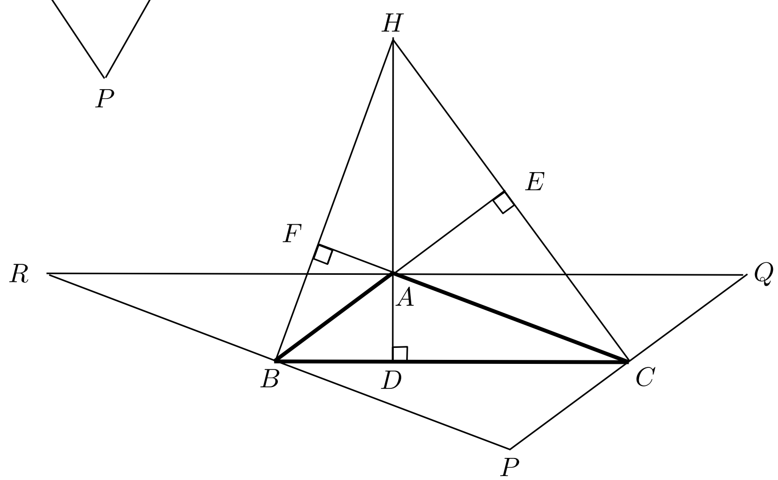
ここで, $AH^2 + MH^2 = AM^2$ なので, $AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$ である。（証明終）



66.　五心のうち４つ目は垂心です。

（解答）A, B, C を通り, それぞれ辺 BC, CA, AB に平行な直線を引き, それらの交点を, 次の図のように P, Q, R とする。四角形 $RBCA$, $ABCQ$ は２組の対辺が平行であるから, ともに平行四辺形である。よって, $RA = BC$, $BC = AQ$ より, $RA = AQ$ となり, A は $\triangle PQR$ の辺 QR の中点となる。同様にして, B, C はそれぞれ辺 RP, PQ の中点となる。したがって, A, B, C から対辺 BC, CA, AB に引いた垂線 AD, BE, CF は $\triangle PQR$ の３辺の垂直二等分線となるから, AD, BE, CF は $\triangle PQR$ の外心 H で交わる。（証明終）





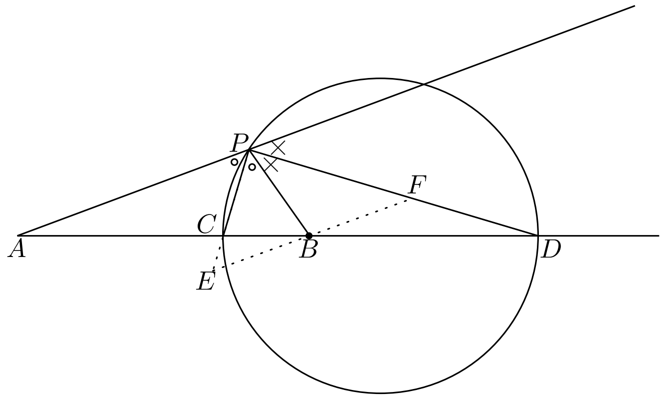
82.　「アポロニウスの円」と呼ばれる円です。

（解答）

(i)　線分 AB を $m : n$ の比に内分, 外分する点を, それぞれ C, D とする。C, D 以外の条件を満たす任意の点を P とすると, $AP : BP = AC : BC$ より, PC は $\angle APB$ の二等分線である。また, $AP : BP = AD : BD$ より, PD は $\angle APB$ の外角の二等分線である。よって, $\angle CPD = 90^\circ$ となるから, 点 P は線分 CD を直径とする円周上にある。

(ii)　逆に, CD を直径とする円周上に点 P をとると, P が C または D と一致するときは明らかに条件を満たす。点 P が C, D と異なるとき, B を通り AP に平行な直線を引き, PC, PD との

交点をそれぞれ E, F とすると, $\triangle APD \backsim \triangle BFD$ より, $AP : BF = AD : BD = m : n$, また, $\triangle ACP \backsim \triangle BCE$ より, $AP : BE = AC : BC = m : n$ になる。よって, $AP : BF = AP : BE$ より, $BF = BE$ となる。また, $\angle CPD = 90^\circ$ であるから, $\triangle PEF$ は直角三角形で, $BF = BE$ より B は $\triangle PEF$ の斜辺 EF の中点となるから, $BP = BF$ となる。したがって, $AP : BP = AP : BF = m : n$ となり, P は条件を満たす。
(i), (ii) より, P の軌跡は線分 CD を直径とする円周である。

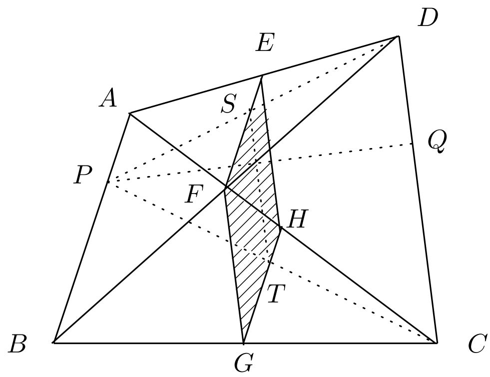


84.　2 つの点を動かす場合は, まずは一方を固定して片方だけ動かしてみます。

（解答）まず点 P を固定して, 辺 CD 上で点 Q を移動させる。$\triangle PCD$ で PD, PC の中点をそれぞれ S, T とすると, 中点連結定理より, PQ の中点 M は線分 ST 上にあり,

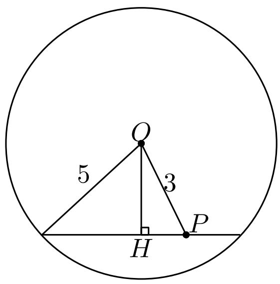
$$ST // DC, \quad ST = \frac{1}{2}DC \cdots (1)$$

である。次に, P を辺 AB 上を A から B まで動かしてみる。AD, AC, BD, BC の中点をそれぞれ E, H, F, G とすると, $\triangle ABD$ および $\triangle DBC$ に中点連結定理を用いて, S は線分 EF 上を, T は線分 HG 上を動くことができる。(1) より線分 ST は一定の長さであり, DC に平行であるから, 四角形 $EFGH$ は平行四辺形である。以上より, M の存在範囲は, 平行四辺形 $EFGH$ の内部および周上である。



90.　最大値・最小値の問題です。

（解答）中心 O より弦への垂線の足 H は, OP を直径とする円周上にあり, $0 \leq OH \leq 3$（等号はそれぞれ $H = O$, $H = P$ のとき成り立つ）である。このとき,（弦の長さ）$= 2\sqrt{5^2 - OH^2}$ である。ゆえに, 弦の長さが最大となるのは, $OH = 0$ のとき, すなわち弦が OP を含む直径のときで, その長さは $\underline{10}$ である。弦の長さが最小となるのは, $OH = 3$ のとき, すなわち, 弦が P を通り, OP に垂直なときで, その長さは $\underline{8}$ である。

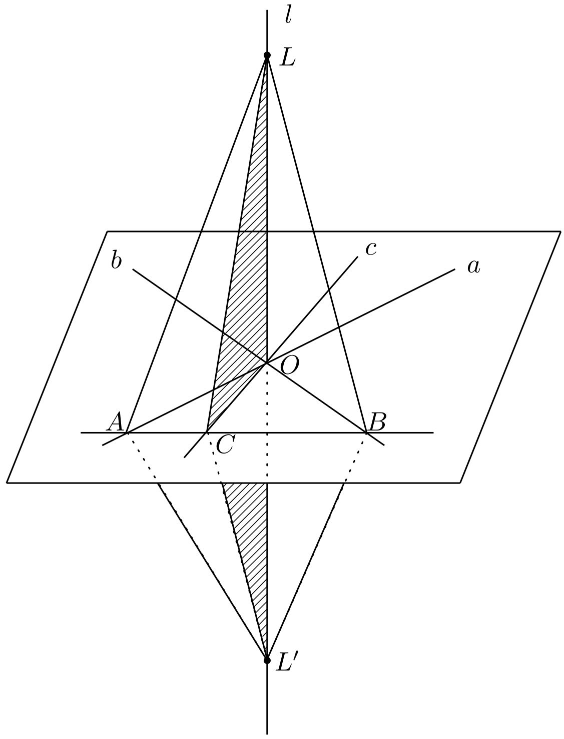


93.　続いて, 直線と平面の関係です。

（解答）

　α 上で O を通る任意の直線を c とする。a, b, c と交わる 1 本の直線を引き, 交点をそれぞれ A, B, C とする。l 上で O に関して対称な点 L, L' をとれば, $l \perp a$, $l \perp b$ なので, 直線 a, b は線分 LL' の垂直二等分線であるから, $AL = AL'$, $BL = BL'$ である。したがって, $\triangle LAB = \triangle L'AB$。よって, $\angle LAB = \angle L'AB$。これと $AL = AL'$ より, $\triangle LAC = \triangle L'AC$ が成り立つ。

　よって $LC = L'C$。また, $OL = OL'$ であるから, $l \perp c$。よって, l は O を通る α 上の任意の直線に垂直であることから, $l \perp \alpha$ である。（証明終）


l
L
b
c
a
O
A
B
C
L′